18/3/21

"Σανίδιο": $(z_n) \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

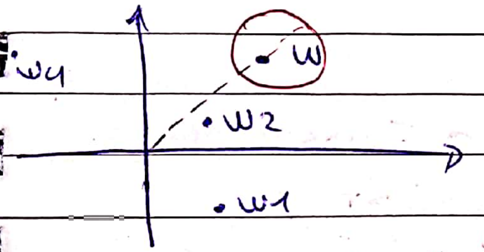
$z_n \to z$ :⟺ $\underbrace{|z_n - z|}_{\in [0,\infty) \subset \mathbb{R}} \to 0$ ⟺ $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}, n\ge n_0: |z_n - z|<\varepsilon$

⟺ $z_n - z \to 0$ ⟺ $\mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, z \wedge \mathrm{Im}\, z_n \to \mathrm{Im}\, z$

Απει3

• $z_n\to z$, $w_n\to w \Rightarrow z_n+w_n\to z+w$, $z_n\cdot w_n\to z\cdot w$ και αν $w\neq 0$: $\frac{z_n}{w_n}\to\frac{z}{w}$ (*)

(*) Να προσεχθεί ότι αν $w\neq 0$ και $w_n\to w$, τότε αναγκαστικά ?.




$w_n\to w \Rightarrow$ για $\varepsilon=\frac{|w|}{4}>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$

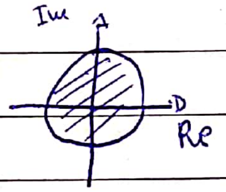
$: \forall n\ge n_0: |w_n - w|<\frac{|w|}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow ||w_n|-|w||\le|w_n-w|<\frac{|w|}{4}$ $\xrightarrow[\text{τριγ. αν.}]{\text{αντιστρ.}}$

⟺ $-\frac{|w|}{4}<|w_n|-|w|<\frac{|w|}{4}$ ⟺ $0<\frac{3|w|}{4}<|w_n|<\frac{5|w|}{4}$

$\Rightarrow |w_n|>0\ \forall n\ge n_0$.

• Συνέχεια ετοιμασίας "σανιδιού": $\underbrace{z\in D(0,1)}$ $:=\{w\in\mathbb{C}: |w-0|=|w|<1\}$




⟺ $|z|<1 \overset{\text{Απει1}}{\Longrightarrow} \underset{|z^n|}{\underset{\|}{|z|^n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ⟺ $|z^n|\to 0$ ⟺ $z^n\to 0$

• $(z_n)\subset\mathbb{C}$ φραγμένη ⟺ $\exists c>0: \forall n\in\mathbb{N}: |z_n|\le c$ ⟺ $\exists c'>0: |z_n|<c'$ ⟺

⟺ $(z_n)\subset D(0,c')$

$D\subset\mathbb{C}$ φραγμένο ⟺ $\exists c\ge 0\ \forall z\in D: |z|\le c$ ⟺ $\exists c'\ge 0\ \forall z\in D: \underbrace{|z|<c'}$

⟺ $\exists c'\ge 0: D\subset D(0,c')$ ⟺ $z\in D(0,c')$

~~Παράδειγμα~~ Για σύγκλιση ακολουθιών στο $\mathbb{C}$ εκτός από τα παραπάνω και τις γνώσεις μας της τοπολογίας του $\mathbb{R}^2$ (= τοπολ. του $\mathbb{C}$) δεν χρειάζεται να βάλουμε άλλο στο "σανίδιο". Ίσως να βάλουμε ~~και~~ στο "σανίδιο" και:

A) $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ακολουθία Cauchy $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n,m \in \mathbb{N},\ n,m \geq n_0 : |z_n - z_m| < \varepsilon \Leftrightarrow (z_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει στο $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{C} : z_n \to z$

B) Θεώρημα Bolzano–Weierstrass: Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα ~~υπ...~~ υποακολουθία

Για ακολουθίες $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ορίζουμε:

$$\boxed{\underbrace{z_n}_{\in \mathbb{C}} \to \infty \;:\Leftrightarrow\; \underbrace{|z_n|}_{\in [0,+\infty) \subset \mathbb{R}} \to +\infty}$$

$\overset{\text{Απ.1}}{:\Leftrightarrow} \forall r>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \underbrace{|z_n| > r}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{|z_n|} < \dfrac{1}{r} = \varepsilon$

$\forall r>0 \Leftrightarrow r \in (0,+\infty) \Leftrightarrow \dfrac{1}{r} \in (0,+\infty)$

$\dfrac{1}{r} =: \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \dfrac{1}{|z_n|} < \varepsilon \overset{\text{Απ.1}}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{|z_n|} \to 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\dfrac{1}{z_n} \to 0}$

Παράδειγμα:

$z_n = n e^{\frac{i\pi n}{2}} \to \infty$

$\Leftrightarrow |z_n| = n \to +\infty$